MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

Petre Năchilă **Cătălin Năchilă**

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M2

Filiera teoretică

Profil real

Specializare: științe ale naturii

Filiera tehnologică

Toate calificările profesionale

SIGMA

CUPRINS

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

BIBLIOGRAFIE

• I.D. Ion, Nicolae R. – „*Algebră*", Editura Didactică și Pedagogică, București 1981

• Năchilă P., Becheanu M., Brânzei D. – „*Subiecte posibile pentru admitere*", Editura Paralela 45, Pitești 1997

• Năchilă P., Stoica C. – „*Probleme pentru admiterea în învățământul superior*", Editura Scorpion, București 1997

• Nicolescu M. – „*Analiză Matematică*", Editura Didactică și Pedagogică, București 1980

• Roșculeț M. – „*Analiza matematică*", Editura Didactică și Pedagogică, București 1984

• Sirețchi Gh. – „*Calcul diferențial și integral*", Editura Științifică și Enciclopedică, București 1985

• Donciu N., Flondor D. – „*Algebră și analiză matematică*", Editura Didactică și Pedagogică, București 1967

• Chițescu I., Alexandrescu P. – „*Analiza matematică*", Editura Paralela 45, Pitești 2000

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

CAPITOLUL I
GRUPURI

I.1. Lege de compoziție internă

Matematicienii egipteni și babilonieni cunoșteau un sistem complet de reguli de calcul privind numerele naturale, numerele raționale pozitive, lungimile, ariile și volumele, ecuațiile de gradul întâi și al doilea. Aceste reguli erau, de obicei, enunțate în cazuri particulare.

Matematicienii greci (Euclid, Diofant) sunt primii care au încercat justificarea acestor reguli de calcul. Notarea cu litere a elementelor care intervin în probleme (adică apariția algebrei) a permis enunțarea primelor reguli generale de calcul, care se aplicau la început și unor numere neprecizate în acea perioadă (numere iraționale, numere complexe).

Perfecționarea notațiilor matematice și introducerea unor noțiuni noi (matrice, polinoame, vectori, etc.) au condus la considerarea operațiilor nedeterminate ce se efectuează cu obiecte nedeterminate (fapt specific algebrei abstracte).

Considerăm acum mulțimea numerelor naturale și operațiile de adunare, scădere și ridicare la putere în mulțimea $\mathbb{N}$. Oricăror două numere naturale a, b le putem asocia un număr natural c care este suma lor și este notat $a+b$. Oricăror două numere naturale $a \geqslant b$ le putem asocia un număr natural d care este diferența lor și este notat $d=a-b$. Să observăm că, dacă $a<b$, atunci $a-b$ nu se poate efectua în $\mathbb{N}$. Spunem că, în acest caz, d „nu este definit". În cazul ridicării la putere a numerelor naturale avem „definit" numărul a^b cu excepția cazului $a=0, b=0$.

În cele trei exemple considerate, orice operație asociază unei perechi ordonate (a,b) de numere naturale un al treilea număr natural (atunci când este posibil). Asemenea operații se numesc și „binare" și pot fi „definite peste tot" sau „nu pot fi definite peste tot". Ordinea în care se consideră „factorii" (sau „termenii") este în general esențială. De exemplu, perechilor $(3,5),(5,3)$ le „corespunde" prin adunare numărul 8, iar perechilor $(2,5)$ și $(5,2)$ le corespund prin operația de ridicare la putere numerele 32, respectiv 25.

Definiție. Fie mulțimea nevidă M. Se numește *lege de compoziție* (*internă*) *pe* M (sau *operație algebrică pe* M sau *operație binară pe* M) o aplicație $f: M \times M \to M$. Elementul corespunzător cuplului (perechii) (x,y) prin funcția (aplicația) f se numește *compusul* lui x cu y (în această ordine !) și se notează cu $f((x,y))$ sau, mai simplu, $f(x,y)$.

Dacă legea de compoziție prezintă unele analogii cu adunarea (numerică) sau înmulțirea (numerică), pentru notarea compusului folosim $x+y$ (notație aditivă) sau $x \cdot y$ (sau xy) (notație multiplicativă). Pentru compusul $f(x,y)$ se mai folosesc și alte notații: $x \circ y, x*y$, $x \wedge y, x \vee y, x \oplus y, x \odot y, x \perp y, x \Delta y$, etc.

EXEMPLU

Legi de compoziție

a) $f: M \times M \to M, f(x,y) = x+y$, unde M este una din mulțimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;

b) $f: M \times M \to M, f(x,y) = xy$, unde M este una din mulțimile de la punctul a);

c) Fie $\mathscr{F}(A) = \{g : A \to A\}$. Atunci $f: \mathscr{F}(A) \times \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(A), f(g,h) = g \circ h$ este o lege de compoziție pe $\mathscr{F}(A)$.

d) Fie $A \neq \varnothing, \mathscr{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$. Atunci funcțiile $f, g : \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$, $f(X,Y) = X \cup Y, g(X,Y) = X \cap Y$ sunt legi de compoziție definite pe $\mathscr{P}(A)$.

Fie mulțimea finită $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Legea de compoziție f definită pe M poate fi cunoscută dacă se indică „tabla” legii de compoziție: la intersecția liniei i cu coloana j se află elementul $f((a_i, a_j))$.

f	a_1	a_2	.....	a_j	.....	a_n
a_1				$\vdots$		
a_2				$\vdots$		
$\vdots$				$\vdots$		
a_i	....			$f(a_i, a_j)$	....	
$\vdots$						
a_n						

EXEMPLU

Să se scrie toate operațiile algebrice definite pe $M = \{0,1\}$.

Soluție. $M \times M$ are $2^2 = 4$ elemente. Atunci numărul operațiilor algebrice definite pe M este $2^4 = 16$. Avem următoarele operații:

	0	1
0	0	0
1	0	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

	0	1
0	0	0
1	1	1

	0	1
0	0	1
1	0	1

	0	1
0	0	1
1	1	0

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

	0	1
0	1	0
1	0	1

	0	1
0	1	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

	0	1
0	1	0
1	0	0

	0	1
0	1	1
1	1	0

	0	1
0	0	0
1	1	0

	[illegible]	1
[illegible]	[illegible]	0
[illegible]	[illegible]	1

	0	1
0	1	0
1	1	0

	0	1
0	0	1
1	0	0

	0	1
0	1	1
1	0	0

Între aceste operații recunoaștem conjuncția $(\wedge)$, disjuncția $(\vee)$, implicația $(\rightarrow)$. Care este tabla „echivalenței" ?

Probleme rezolvate

1. Fie $M=\{1,2,3,4\}$. Este lege de compoziție $f:M\times M\to M$ dată de

$$f(x,y)=\begin{cases} x-y, & x\geqslant 3,\ y\leqslant 2 \\ x+|x-y| & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}\ ?$$

Soluție. „Tabla" legii este reprezentată alăturat.

f	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	2	3	4
3	2	1	3	4
4	3	2	5	4

Observăm că $f(4,3)=5\notin M$, deci nu avem lege de compoziție.

2. Fie D_n mulțimea divizorilor naturali ai numărului natural $n\geqslant 2$. Pe D_n se definește legea de compoziție $x\circ y=(x,y)$ (cel mai mare divizor comun al lui x și y). Să se scrie tabla legii de compoziție pentru D_8 și D_{12}.

Soluție. Avem $D_8=\{1,2,4,8\}$, $D_{12}=\{1,2,3,4,6,12\}$. Cele două table de compoziție sunt:

$\circ$	1	2	4	8
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
4	1	2	4	4
8	1	2	4	8

$\circ$	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

3. Să se demonstreze că legea „$\circ$" este lege de compoziție pe M = [–3, 5], unde $x\circ y=xy-4x-4y+20$, $\forall x, y\in M$.

Soluție. Observăm că legea dată se mai poate scrie: $x\circ y=(x-4)(y-4)+4$. Dacă $x, y\in[-3, 5]$, atunci $x-4, y-4\in[-1, 1]$ și deci $(x-4)(y-4)\in[-1, 1]$. Atunci rezultă că $((x-4)(y-4)+4)\in[-3, 5]$ și deci $x\circ y\in M$.

4. Fie mulțimea de matrice $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$.

Să se demonstreze că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe M.

Soluție. Notăm $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Vom demonstra că $A(x) \cdot A(y) \in M$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Într-adevăr,

$$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 & 1-y \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-y & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2xy-x-y & 0 & -(2xy-x-y) \\ 0 & 0 & 0 \\ -(2xy-x-y) & 0 & 1+2xy-x-y \end{pmatrix} =$$

$$= A(2xy-x-y).$$

Pentru că $A(x) \cdot A(y) \in M$, trebuie să demonstrăm că $1+2xy-x-y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Într-adevăr, din $x, y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ rezultă $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) \neq 0$, adică $2x - x - y + \frac{1}{2} \neq 0$, de unde $2xy - x - y + 1 \neq \frac{1}{2}$.

5. Câte elemente are mulțimea $M = \left\{ A^n \middle| A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$?

Soluție. Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = O_3$ și deci $M = \{O_3, A, A^2\}$. M are trei elemente.

PROBLEME PROPUSE

1. Justificați de ce împărțirea nu este operație algebrică (lege de compoziție internă) pe fiecare din mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

2. Justificați de ce adunarea, înmulțirea, scăderea și împărțirea nu sunt legi de compoziție pe mulțimea numerelor iraționale.

3. Pentru $a, b \in \mathbb{N}^*$ notăm cu $a \vee b$, respectiv cu $a \wedge b$, c.m.m.d.c., respectiv c.m.m.m.c. al numerelor a și b.

a) Să se calculeze $10 \vee 12$, $10 \vee (12 \vee 8)$ și $(10 \vee 12) \vee 8$.

b) Să se calculeze $6 \wedge 15$, $6 \wedge (9 \wedge 15)$ și $(6 \wedge 9) \wedge 15$.

c) Să se demonstreze că, pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$, avem:

$1 \vee a = 1, a \vee a = a, 1 \wedge a = a, a \wedge a = a$.

4. Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$ şi fie mulţimea $D(a) = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \mid a\}$.

Fie „$\vee$" şi „$\wedge$" operaţiile algebrice de „luare" a c.m.m.d.c., respectiv a c.m.m.m.c.

a) Să se determine $D(8)$, $D(13)$, $D(36)$.

b) Sunt „$\vee$" şi „$\wedge$" legi de compoziţie pe $D(8)$, $D(13)$, $D(36)$?

c) Sunt „$\vee$" şi „$\wedge$" legi de compoziţie pe $D(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$?

5. a) Să se demonstreze că, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, avem:

$$\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2},\ \min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

b) Pe care din mulţimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, „max" şi „min" sunt legi de compoziţie?

c) Să se scrie tabelele legilor „max" şi „min" pe mulţimile $M_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $M_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

6. Să se demonstreze că operaţia „$\circ$" este lege de compoziţie pe mulţimea indicată în fiecare din cazurile:

a) $M = (3, \infty)$, $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$;

b) $M = [3, \infty)$, $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$;

c) $M = [4, 6]$, $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$;

d) $M = 2\mathbb{Z} + 1 = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $x \circ y = \dfrac{xy + x + y - 1}{2}$;

e) $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$;

f) $M = (-\infty, 1)$, $x \circ y = \dfrac{xy-2}{x+y-3}$.

7. Fie mulţimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Fie funcţia $f: M \times M \to M$ definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} |x-y|, & x \leqslant 2,\ y \leqslant 2 \\ a - |x-y|, & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}.$$

Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât f să fie lege de compoziţie.

8. Să se demonstreze că „$\cdot$" este lege de compoziţie internă pe mulţimea indicată:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix} \middle|\ a > -1 \right\}$; **b)** $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix} \middle|\ a > -1 \right\}$;

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$; **d)** $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \middle|\ x, y \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$.

I.2. Clase de resturi modulo n

Fie numărul natural $n \geqslant 2$. Împărțim mulțimea numerelor întregi în „clase" în modul următor: fiecare clasă cuprinde toate numerele întregi care împărțite la n dau același rest. O astfel de clasă se numește *clasă de resturi modulo n*. Deoarece restul împărțirii oricărui număr întreg la n este unul din numerele 0, 1, 2, 3, ... , n–1, rezultă că există exact n clase de resturi modulo n. Aceste clase le notăm C_k sau $\hat{k}$, unde $0 \leqslant k \leqslant n-1$ și $C_k = \hat{k} = \{nm + k \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Avem deci $C_0 = \hat{0} = \{nm \mid m \in \mathbb{Z}\}$, $C_1 = \hat{1} = \{nm + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$, etc.. Orice număr dintr-o anumită clasă se numește *reprezentant al clasei*. De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 6, numerele –8, –2, 4, 10, 16 sunt reprezentanți ai clasei C_4. De obicei, ca reprezentant luăm cel mai mic reprezentant număr natural. În cazul claselor de resturi modulo 6 avem deci $\widehat{-8} = \widehat{-2} = \widehat{10} = \widehat{16} = \hat{4} = C_4$.

Pe mulțimea claselor de resturi modulo n (notată $\mathbb{Z}_n$) introducem două operații notate aditiv și multiplicativ definite astfel: $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$, $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$. Tablele adunării și înmulțirii definite ca mai sus pentru $\mathbb{Z}_4$ sunt:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Definiție. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ și $x, y \in \mathbb{Z}$. Spunem că x este congruent cu y modulo n dacă $n \mid x - y$. Notăm $x \equiv y \pmod{n}$.

Teoremă. Relația de congruență modulo n are proprietățile:

a) este reflexivă: $x \equiv x \pmod{n}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$;

b) este simetrică: $x \equiv y \pmod{n}$, $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \equiv x \pmod{n}$;

c) este tranzitivă: $x \equiv y \pmod{n}$, $y \equiv z \pmod{n}$, $x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \equiv z \pmod{n}$.

Demonstrație. a) $x - x = 0$, $n \mid 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2 \Rightarrow x \equiv x \pmod{n}$;

b) $x \equiv y \pmod{n} \Rightarrow n \mid x - y \Rightarrow$ există $d \in \mathbb{Z}$ cu $x - y = dn \Rightarrow y - x = (-d) \cdot n$, $-d \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \mid y - x$;

c) $x \equiv y \pmod{n}$, $y \equiv z \pmod{n} \Rightarrow$ există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x - y = na$, $y - z = nb$. Cum $x - z = (x - y) + (y - z) = n(a + b)$ și $a + b \in \mathbb{Z}$, rezultă că $n \mid x - z$ și deci $x \equiv z \pmod{n}$.